**第四部分线性相关性**

1. **主要内容**
2. **向量组线性组合与表示**

**(1)线性组合 设是一维向量组，是一组实数，称是的一个线性组合．**

**(2) 线性表示 给定向量组和向量，如果存在一组数，使得，则称可由线性表示．**

**向量能由向量组线性表示线性方程组 有解.**

**向量组的线性表示 如果向量组中每一个向量都能由向量组线性表示，则称向量组能由向量组线性表示．用矩阵表述为：若存在矩阵，使得，则称向量组可由向量组线性表示．**

**注 利用矩阵表述向量组之间的关系给处理有关线性相关性的问题带来许多方便，在后面的例题中可充分体会到这一点．**

**等价向量组 如果向量组能由向量组线性表示，向量组也能由向量组线性表示，则称向量组与向量组是等价向量组．**

**2、线性相关性的概念及结论**

**(1) 线性相关、线性无关 设为**个**维向量，若存在**个不全为零的数，使，则称线性相关．若由，可推出全为零，则称线性无关．**

**(2)维向量组线性相关**

**其中有一个向量可以由其余向量线性表示；**

**含有零向量的向量组一定线性相关．**

**(3)线性无关，而线性相关可由惟一线性表示．**

**(4)维向量组线性相关齐次线性方程组有非零解．其中．特别地时， 线性相关的充要条件是．**

**(5)线性相关以为列的矩阵的秩小于，**

**线性无关以为列的的矩阵的秩等于*．***

**(6) 向量能由向量组线性表示矩阵的 秩等于矩阵的秩．**

**(7) 一线性相关向量组任意添加若干个向量所得新向量组仍线性相关，一线性无关向量组任意减少若干个向量所得新向量组仍线性无关．**

**(8) 将线性无关的维向量组中每个向量均延长相同个数的分量得到的新向量组仍线性无关．**

**3、 向量组秩的概念及结论**

**(1) 向量组的最大线性无关组和秩 设有向量组，如果中存在个向量，满足**

**1) 线性无关，**

**2) 向量组中任意个向量（如果存在的话）都线性相关，**

**则称是向量组的一个最大线性无关组或极大线性无关组（简称最大无关组或极大无关组），最大无关组所含向量的个数称为向量组的秩，记作．**

**只含零向量的向量组无最大无关组，此时规定秩为零．**

**(2)最大无关组的等价定义 设有向量组，如果中存在个向量，满足：**

**1)线性无关；**

**2)向量组中任意向量都能由线性表示；**

**则称是向量组的一个最大线性无关组或极大线性无关组．**

**(3) 矩阵的秩等于它的列向量组的秩，也等于它的行向量组的秩．**

**(4) 设矩阵的秩为** ，则中有一个不等于的**阶子式，且所在的**个行向量是行向量组的最大线性无关组；所在的**个列向量是列向量组的最大线性无关组．**

**(5) 若向量组能由向量组线性表示，则．**

**(6) 向量组能由向量组线性表示的充分必要条件是**

****

**4、向量空间的概念**

**(1)向量空间 设为维向量的集合，如果集合非空，且满足：**

**1) 对于任意，有；**

**2) 对于任意实数**，有；**

**则称为维向量空间．**

**(2)子空间 设有向量空间及，若，则称是的子空间．**

**(3) 向量空间的基、维数 设为向量空间，如果中的个向量 满足：**

**1)****线性无关；**

**2)中任一向量都可由线性表示；**

**则称为的一组基，**为的维数，称为**维向量空间．**

**(4)生成的向量空间 设是一向量组，**

**令，则称是由生成的向量空间，的最大无关组就是的基，的秩是的维数．**

**二、 例题**

**（一）、填空题**

**【例】 设向量组的秩为2，则 2 ，  5 ．**

**【例】已知向量组，，线性相关，则  ．**

### 选择题

**【例】设矩阵 、、均为阶方阵，若，且可逆，以下正确的是【 Ｂ 】．**

**(A) 矩阵的行向量组与矩阵的行向量组等价；**

**（B）矩阵的列向量组与矩阵的列向量组等价；**

**（C矩阵的行向量组与矩阵的行向量组等价；**

**（D）矩阵的列向量组与矩阵的列向量组等价．**

**【例】 ，其中为任意常数，则下列向量组线性相关的为（ C ）**

1. **； （B）; (C) ; (D) .**

**【例】 设均为维列向量，下列选项不正确的是【 B 】．**

**（A）对于任意一组不全为的数都有，则线性无关；**

**（B）若线性相关，则对于任意一组不全为数都有；**

**（C）线性无关的充分必要条件是此向量组的秩为；**

**(D）若线性无关的必要条件是其中任意两个向量线性无关．**

**【例】 设均为维列向量，是矩阵，下列选项正确的是【 A 】．**

**（A）若线性相关，则线性相关；**

**（B）若线性相关，则线性无关；**

**（C）若线性无关，则线性相关；**

**（D）若线性无关，则线性无关．**

**【例】设是4阶矩阵，且的行列式，则中【 (C) 】．**

**(A) 必有一列元素全为0；**

**(B) 必有两列元素成比例；**

**(C) 必有一列向量是其余列向量的线性组合；**

**(D) 任意列向量是其余列向量的线性组合．**

**【例】**  设是三维向量，则对任意常数，向量组线性无关是向量组

线性无关的 ( A )

(A)必要非充分条件 (B)充分非必要条件

(C)充分必要条件 (D)既非充分又非必要条件

**解**  .

 记，. 若线性无关，则，故线性无关.

线性无关,举反例. 令，则线性无关，但此时却线性相关.

故选(A).

**(三)、解答题．**

**【例】设为方阵的两个不同特征值，为的相应于的两个线性无关的特征向量，为的相应于的两个线性无关的特征向量，证明：向量组线性无关。**

**证明：设，**

**因为为的相应于的两个线性无关的特征向量，为的相应于的两个线性**

**无关的特征向量，有 （a）**

1. **式左右两端同时左乘A可得，** **（(b)**

**可得， **

**又因为为方阵的两个不同特征值，且线性无关，可得**

****

**同理可得**

**因此向量组线性无关。**

**【例】设*A*为3阶矩阵，，为*A*的分别属于特征值，1的特征向量，向量满足，证明线性无关；**

**证: 令， （1）**

**则**

**于是有  （2）**

**（1）-（2）得，**

**由，线性无关得，**

**代入（1）得 ，由得，**

**故线性无关．**

**【例】 是齐次线性方程组的基础解系，满足，证明：线性无关．**

**解： 令**

**整理得，**

**上式两端左乘得，**

**则有，由得，**

**于是有，**

**由线性无关得，从而有，**

**故线性无关．**

**【例】 若向量是元非齐次线性方程组的解向量，那么它们的线性组合也是该方程组解向量的充分必要条件是；**

**【例】设是阶矩阵，和是的两个不同的特征值，是的属于特征值的两个线性无关的特征向量，是的属于特征值的特征向量，证明：线性无关．**

**【例】设为维空间中的正交向量组，证明：线性无关.**

**令，（2分）**

**用左乘上式两端得，**

**，**

**由为维空间中的正交向量组知，，**

**则有. （5分）**

**因此线性无关.（6分）**

**【例】 设是非齐次线性方程组的一个解,是对应的齐次线性方程组的基础解系,证明:**

**(1) 线性无关;**

**(2) 线性无关;**

**证: (1)令 ,**

**用左乘上式两端得, .**

**则有,由知,.。**

**于是有,**

**由线性无关知, .**

**因此线性无关.**

**(2) 令,**

**整理得**

**由(1)知线性无关,于是得**

**,**

**则有,**

**因此线性无关.**